

# Zéros de champs gaussiens stationnaires

Thomas Letendre (Université Paris–Saclay)  
avec Michele Ancona

Nice – 22 novembre 2022

# Zéros d'un champ gaussien stationnaire

## Champ gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  champ gaussien stationnaire centré de classe  $\mathcal{C}^p$  ( $p \geq 1$ ).

Sa fonction de corrélation  $\kappa : z \mapsto \mathbb{E}[f(0)f(z)]$  est  $\mathcal{C}^{2p}$ .

Pour  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $k, l \in \{0, \dots, p\}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ f^{(k)}(x) f^{(l)}(y) \right] = (-1)^k \kappa^{(k+l)}(y - x).$$

## Champ gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  champ gaussien stationnaire centré de classe  $\mathcal{C}^p$  ( $p \geq 1$ ).

Sa fonction de corrélation  $\kappa : z \mapsto \mathbb{E}[f(0)f(z)]$  est  $\mathcal{C}^{2p}$ .

Pour  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $k, l \in \{0, \dots, p\}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ f^{(k)}(x) f^{(l)}(y) \right] = (-1)^k \kappa^{(k+l)}(y - x).$$

### Normalisation

$$\text{Var}(f(x)) = \kappa(0) = 1 \quad \text{et} \quad \text{Var}(f'(x)) = -\kappa''(0) = 1.$$

Exemple :  $f_{\text{BF}}$  champ de Bargmann–Fock, lisse,  $\kappa_{\text{BF}} : z \mapsto e^{-\frac{1}{2}z^2}$ .

# Mesures aléatoires et statistiques linéaires

## Lemme (Bulinskaya, 1961)

*Presque sûrement,  $Z = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$  est fermé et discret.*

Pour  $R > 0$ , on note  $\nu_R = \sum_{Rx \in Z} \delta_x$  la mesure de comptage de  $\frac{1}{R}Z$ .

Pour  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonction-test :  $\langle \nu_R, \phi \rangle = \sum_{Rx \in Z} \phi(x) = \sum_{x \in Z} \phi\left(\frac{x}{R}\right)$ .

$$N_R = \text{card}(Z \cap [0, R]) = \langle \nu_R, \mathbf{1}_{[0,1]} \rangle.$$

# Mesures aléatoires et statistiques linéaires

## Lemme (Bulinskaya, 1961)

*Presque sûrement,  $Z = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$  est fermé et discret.*

Pour  $R > 0$ , on note  $\nu_R = \sum_{Rx \in Z} \delta_x$  la mesure de comptage de  $\frac{1}{R}Z$ .

Pour  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonction-test :  $\langle \nu_R, \phi \rangle = \sum_{Rx \in Z} \phi(x) = \sum_{x \in Z} \phi\left(\frac{x}{R}\right)$ .

$$N_R = \text{card}(Z \cap [0, R]) = \langle \nu_R, \mathbf{1}_{[0,1]} \rangle.$$

## Remarque

$\langle \nu_R, \phi \rangle$  est bien définie presque sûrement si  $\phi$  est positive ou si  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ .

## Résultats connus pour $N_R$

Rice (1945) :  $\mathbb{E}[N_R] = \frac{R}{\pi}$ .

Cuzick (1976) : Si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  et  $\kappa, \kappa'' \in L^2(\mathbb{R})$  alors  $\frac{1}{R} \text{Var}(N_R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \sigma^2$ .

Si de plus  $\sigma > 0$ , alors  $\frac{1}{\sqrt{R}\sigma} \left(N_R - \frac{R}{\pi}\right) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, 1)$ .

Kratz–Leòn (1997) : On a  $\sigma > 0$ .

Nazarov–Sodin (2016) : Si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  et  $\kappa(z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $\frac{N_R}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi}$  p.s.

# Décorrélation asymptotique

On supposera toujours  $\kappa(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

## Lemme

*Sous cette condition,  $(f^{(k_1)}(x_1), \dots, f^{(k_m)}(x_m))$  est non-dégénéré pour tout  $(k_1, x_1), \dots, (k_m, x_m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$  distincts.*



# Décorrélation asymptotique

On supposera toujours  $\kappa(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

## Lemme

Sous cette condition,  $(f^{(k_1)}(x_1), \dots, f^{(k_m)}(x_m))$  est non-dégénéré pour tout  $(k_1, x_1), \dots, (k_m, x_m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$  distincts.

## Définition (Normes $\mathcal{C}^{2p}$ )

Pour tout  $\eta \geq 0$  on note :

$$\|\kappa\|_{2p, \eta} = \max \left\{ \left| \kappa^{(l)}(x) \right| \mid 0 \leq l \leq 2p, |x| \geq \eta \right\}.$$

On a  $\|\kappa\|_{2p, \eta} \leq \|\kappa\|_{2p, 0} = \max \left\{ \left| \kappa^{(2l)}(0) \right| \mid 0 \leq l \leq p \right\}$ .

# Moments des statistiques linéaires

## Proposition

Si  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable et positive ou dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $R > 0$  :

$$\mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi \rangle] = \frac{R}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx.$$

En particulier,  $\mathbb{E}[\nu_R] = \frac{R}{\pi} dx$  et tant que mesure de Radon.

# Fonctions-test et moments

## Fonction-test

On considère  $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ , continue presque partout.

Exemples :

- $\phi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ ,
- $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,
- $\mathbf{1}_{]a,b[}$ , avec  $a < b$ .

# Fonctions-test et moments

## Fonction-test

On considère  $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ , continue presque partout.

Exemples :

- $\phi \in C_c^0(\mathbb{R})$ ,
- $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,
- $\mathbf{1}_{]a,b[}$ , avec  $a < b$ .

## Moment centré d'ordre $p \geq 2$

Soient  $\phi_1, \dots, \phi_p$  des fonctions-test, on note :

$$m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) = \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^p \left( \langle \nu_R, \phi_i \rangle - \mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi_i \rangle] \right) \right].$$

Exemple :  $m_2(\nu_R)(\phi_1, \phi_2)$  est la covariance de  $\langle \nu_R, \phi_1 \rangle$  et  $\langle \nu_R, \phi_2 \rangle$ .

# Structure de covariance

## Proposition

On suppose que  $f$  est  $\mathcal{C}^2$ , que  $\kappa$  et  $\kappa'' \in L^2(\mathbb{R})$  et que  $\|\kappa\|_{2,\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} 0$ .  
Alors il existe  $\sigma > 0$  telle que pour toutes  $\phi_1, \phi_2$  fonctions-test :

$$m_2(\nu_R)(\phi_1, \phi_2) = R\sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x)\phi_2(x) dx + o(R).$$

Exemple :  $\phi_1 = \mathbf{1}_{[0,1]}$  et  $\phi_2 = \mathbf{1}_{[1,2]}$

$$\text{Cov} \left( \frac{\text{card}(Z \cap [0, R])}{\sqrt{R}}, \frac{\text{card}(Z \cap [R, 2R])}{\sqrt{R}} \right) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

# Partitions en paires

## Définitions

- Une *partition* de  $\{1, \dots, p\}$  est une famille  $\mathcal{I}$  de parties de  $\{1, \dots, p\}$  non-vides, disjointes, et telles que  $\bigsqcup_{I \in \mathcal{I}} I = \{1, \dots, p\}$ .
- On parle de *partition en paires* si  $|I| = 2$  pour tout  $I \in \mathcal{I}$ .
- $\mathcal{P}_p$  (resp.  $\mathcal{PP}_p$ ) ensemble des partitions (resp. en paires) de  $\{1, \dots, p\}$ .

$$\text{card}(\mathcal{PP}_p) = \mathbb{E}[\mathcal{N}(0, 1)^p] = \begin{cases} \frac{p!}{2^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2}\right)!} & \text{si } p \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Asymptotiques des moments centrés

## Théorème (Ancona–L., 2020)

Soit  $p \geq 3$ , on suppose  $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$  et  $\|\kappa\|_{2p,\eta} = o(\eta^{-4p})$  quand  $\eta \rightarrow +\infty$ .  
Pour toutes  $\phi_1, \dots, \phi_p$  fonctions-test on a :

$$m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) = \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{PP}_p} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{I}} m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j) + o(R^{\frac{p}{2}}).$$

En particulier,

$$m_p(\nu_R)(\phi, \dots, \phi) = \mathbb{E}[\mathcal{N}(0, 1)^p] \text{Var}(\langle \nu_R, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}} + o(R^{\frac{p}{2}}).$$



# Asymptotiques des moments centrés

## Théorème (Ancona–L., 2020)

Soit  $p \geq 3$ , on suppose  $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$  et  $\|\kappa\|_{2p,\eta} = o(\eta^{-4p})$  quand  $\eta \rightarrow +\infty$ .  
Pour toutes  $\phi_1, \dots, \phi_p$  fonctions-test on a :

$$m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) = \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{PP}_p} \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{I}} m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j) + o(R^{\frac{p}{2}}).$$

En particulier,

$$m_p(\nu_R)(\phi, \dots, \phi) = \mathbb{E}[\mathcal{N}(0, 1)^p] \text{Var}(\langle \nu_R, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}} + o(R^{\frac{p}{2}}).$$

## Thèse de Louis Gass (2022)

Le résultat reste vrai si  $f \in \mathcal{C}^{2p}(\mathbb{R})$  et pour tout  $k \in \{0, \dots, 4p\}$  on a  $\kappa^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$  et tend vers 0 (par exemple  $\kappa = \text{sinc}$ ).

# Conséquences des asymptotiques de moments

## Corollaire (Concentration)

Si  $f$  est  $\mathcal{C}^{2p}$  et  $\|\kappa\|_{4p,\eta} = o(\eta^{-8p})$  alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{R} N_R - \frac{1}{\pi} \right| > \varepsilon \right) = O(R^{-p}).$$

## Corollaire (Théorème central limite fonctionnel)

Si  $\kappa \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors on a dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  :

$$\frac{1}{\sqrt{R\sigma}} \left( \nu_R - \frac{R}{\pi} dx \right) \xrightarrow[R \rightarrow +\infty]{\text{loi}} \text{bruit blanc gaussien.}$$

Formules de Kac–Rice  
et  
fonctions à  $p$  points

## Formules de Kac–Rice

Soient  $R > 0$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\phi_1, \dots, \phi_p$  des fonctions-test, on a :

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^p \langle \nu_R, \phi_i \rangle \right] = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) \rho_p(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p,$$

$$\text{où } \rho_p(x_1, \dots, x_p) = \frac{\mathbb{E} \left[ |f'(x_1)| \dots |f'(x_p)| \mid f(x_1) = \dots = f(x_p) = 0 \right]}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \det \left( \text{Var}(f(x_1), \dots, f(x_p)) \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

## Formules de Kac–Rice

Soient  $R > 0$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\phi_1, \dots, \phi_p$  des fonctions-test, on a :

$$\mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^p \langle \nu_R, \phi_i \rangle \right] = \int_{\mathbb{R}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) \rho_p(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p,$$

$$\text{où } \rho_p(x_1, \dots, x_p) = \frac{\mathbb{E} \left[ |f'(x_1)| \dots |f'(x_p)| \mid f(x_1) = \dots = f(x_p) = 0 \right]}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \det \left( \text{Var}(f(x_1), \dots, f(x_p)) \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

### Remarques

- Connues au moins depuis Cramer–Leadbetter (1967).
- $\rho_1 \equiv \frac{1}{\pi}$
- $\rho_p$  est définie sur  $\{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \text{ deux à deux distincts}\}$ .
- Si  $\rho_p$  est bornée, l'intégrale est  $O(R^p)$ .

## Fonctions à $p$ points

$\rho_p$  est la fonction à  $p$  points du processus ponctuel  $Z$ .

Pour tout  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$  distincts,

$$\frac{1}{(2\varepsilon)^p} \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^p \text{card} (Z \cap [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_p(x_1, \dots, x_p).$$

## Fonctions à $p$ points

$\rho_p$  est la fonction à  $p$  points du processus ponctuel  $Z$ .

Pour tout  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$  distincts,

$$\frac{1}{(2\varepsilon)^p} \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^p \text{card} (Z \cap [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_p(x_1, \dots, x_p).$$

### Théorème (Ancona–L., 2020)

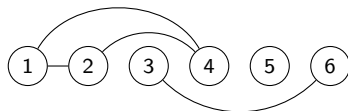
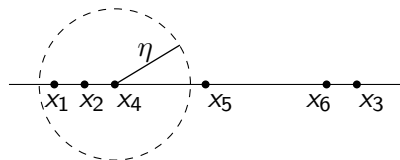
Si  $f$  est  $C^p$  et  $\|k\|_{2p, \eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} 0$ , alors il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$  distincts :

$$\rho_p(x_1, \dots, x_p) \leq C \prod_{i < j} \min(|x_i - x_j|, 1).$$

# Graphes et partitions

Soient  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$  et  $\eta \geq 0$  on définit un graphe  $G_\eta(\underline{x})$  par :

- les sommets sont  $\{1, \dots, p\}$ ,
- une arête joint  $i$  et  $j$  si et seulement si  $i \neq j$  et  $|x_i - x_j| \leq \eta$ .

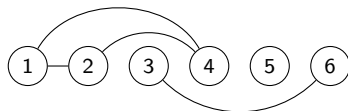
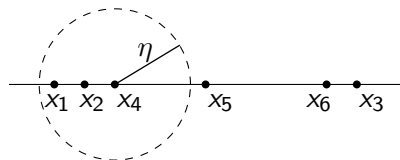




# Graphes et partitions

Soient  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$  et  $\eta \geq 0$  on définit un graphe  $G_\eta(\underline{x})$  par :

- les sommets sont  $\{1, \dots, p\}$ ,
- une arête joint  $i$  et  $j$  si et seulement si  $i \neq j$  et  $|x_i - x_j| \leq \eta$ .



$\mathcal{I}_\eta(\underline{x}) \in \mathcal{P}_p$  est la partition définie par les composantes connexes de  $G_\eta(\underline{x})$ .

Exemple :  $\mathcal{I}_\eta(\underline{x}) = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 6\}, \{5\}\} \in \mathcal{P}_6$ .

# Singularités des fonctions à $p$ points

## Définition

Soient  $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$  et  $\eta \geq 0$ , on note  $\mathbb{R}_{\mathcal{I},\eta}^p = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^p \mid \mathcal{I}_\eta(\underline{x}) = \mathcal{I}\}$ .

Exemple :  $\underline{x} \in \mathbb{R}_{\mathcal{I},0}^p$  signifie que  $(x_i = x_j \Leftrightarrow \exists I \in \mathcal{I} \text{ tel que } i, j \in I)$ .

# Singularités des fonctions à $p$ points

## Définition

Soient  $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$  et  $\eta \geq 0$ , on note  $\mathbb{R}_{\mathcal{I},\eta}^p = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^p \mid \mathcal{I}_\eta(\underline{x}) = \mathcal{I}\}$ .

Exemple :  $\underline{x} \in \mathbb{R}_{\mathcal{I},0}^p$  signifie que  $(x_i = x_j \Leftrightarrow \exists I \in \mathcal{I} \text{ tel que } i, j \in I)$ .

## Théorème (Ancona–L., 2020)

On suppose que  $f$  est  $\mathcal{C}^p$  et  $\|\kappa\|_{2p,\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} 0$ .

Soient  $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$  et  $\underline{y} \in \mathbb{R}_{\mathcal{I},0}^p$ , il existe  $\ell(\underline{y}) > 0$  telle que, lorsque  $\underline{x} \rightarrow \underline{y}$ ,

$$\rho_p(\underline{x}) \sim \ell(\underline{y}) \prod_{I \in \mathcal{I}} \prod_{\{(i,j) \in I^2 \mid i < j\}} |x_i - x_j|.$$

# Clustering

Soit  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_p)$ , pour tout  $I \subset \{1, \dots, p\}$ , on note  $\underline{x}_I = (x_i)_{i \in I}$ .

## Théorème (Ancona–L., 2020)

On suppose que  $f$  est  $\mathcal{C}^p$  et  $\|\kappa\|_{2p,\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow +\infty} 0$ .

Uniformément pour tout  $\eta \geq 1$ , tout  $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$  et tout  $\underline{x} \in \mathbb{R}_{\mathcal{I},\eta}^p$  on a :

$$\rho_p(\underline{x}) = \left( \prod_{I \in \mathcal{I}} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \right) \left( 1 + O\left(\sqrt{\|\kappa\|_{2p,\eta}}\right) \right)$$

# Clustering implique asymptotique des moments

## Expression des moments centrés

$$m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) = \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \mathbb{E} \left[ \prod_{i \in I} \langle \nu_R, \phi_i \rangle \right] \prod_{i \notin I} \mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi_i \rangle]$$

## Expression des moments centrés

$$\begin{aligned} m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \mathbb{E} \left[ \prod_{i \in I} \langle \nu_R, \phi_i \rangle \right] \prod_{i \notin I} \mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi_i \rangle] \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) \left( \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \notin I} \rho_1(x_i) \right) d\underline{x} \end{aligned}$$

## Expression des moments centrés

$$\begin{aligned} m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \mathbb{E} \left[ \prod_{i \in I} \langle \nu_R, \phi_i \rangle \right] \prod_{i \notin I} \mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi_i \rangle] \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) \left( \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \notin I} \rho_1(x_i) \right) d\underline{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) d\underline{x}. \end{aligned}$$



## Expression des moments centrés

$$\begin{aligned} m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \mathbb{E} \left[ \prod_{i \in I} \langle \nu_R, \phi_i \rangle \right] \prod_{i \notin I} \mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi_i \rangle] \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) \left( \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \notin I} \rho_1(x_i) \right) d\underline{x} \\ &= \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p} \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) d\underline{x}. \end{aligned}$$

## Expression des moments centrés

$$\begin{aligned} m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \mathbb{E} \left[ \prod_{i \in I} \langle \nu_R, \phi_i \rangle \right] \prod_{i \notin I} \mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi_i \rangle] \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) \left( \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \notin I} \rho_1(x_i) \right) d\underline{x} \\ &= \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p} \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) d\underline{x}. \end{aligned}$$

## Expression des moments centrés

$$\begin{aligned} m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \mathbb{E} \left[ \prod_{i \in I} \langle \nu_R, \phi_i \rangle \right] \prod_{i \notin I} \mathbb{E}[\langle \nu_R, \phi_i \rangle] \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) \left( \sum_{I \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|I|} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \notin I} \rho_1(x_i) \right) d\underline{x} \\ &= \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p} \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) d\underline{x}. \end{aligned}$$

Comme  $\|\kappa\|_{2p, \eta} = o(\eta^{-4p})$ , il existe une fonction  $R \mapsto \eta(R)$  telle que :

- $\eta(R) \rightarrow +\infty$ ,
- $\eta(R) = o(R^{\frac{1}{4}})$ ,
- $\|\kappa\|_{2p, \eta(R)} = o(R^{-p})$ .

## Partitions avec un singleton

Soit  $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$  telle que  $\{p\} \in \mathcal{I}$ . Uniformément sur  $\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p$ , on a :

$$\begin{aligned} F_p(\underline{x}) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, p-1\}} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^{p-|I|-1} (\rho_{|I|+1}(\underline{x}_I, x_p) - \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \rho_1(x_p)) \\ &= o(R^{-\frac{p}{2}}). \end{aligned}$$

## Partitions avec un singleton

Soit  $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$  telle que  $\{p\} \in \mathcal{I}$ . Uniformément sur  $\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p$ , on a :

$$\begin{aligned} F_p(\underline{x}) &= \sum_{I \subset \{1, \dots, p-1\}} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^{p-|I|-1} (\rho_{|I|+1}(\underline{x}_I, x_p) - \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \rho_1(x_p)) \\ &= o(R^{-\frac{p}{2}}). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) \, d\underline{x} \right| &\ll R^{-\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \prod_{i=1}^p \left| \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right| \, d\underline{x} \\ &\ll R^{\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{R}^p} \prod_{i=1}^p |\phi_i(x_i)| \, d\underline{x}. \end{aligned}$$

## Partitions sans singletons

Utilisant le clustering, on a  $F_p(\underline{x}) \simeq \prod_{I \in \mathcal{I}} F_{|I|}(\underline{x}_I)$  uniformément sur  $\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) \, d\underline{x} &\simeq \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \prod_{I \in \mathcal{I}} \left( F_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \in I} \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) \, d\underline{x} \\ &\simeq \prod_{I \in \mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_{\{I\}, \eta(R)}^{|I|} } \left( \prod_{i \in I} \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_{|I|}(\underline{x}_I) \, d\underline{x}_I. \end{aligned}$$

## Partitions sans singletons

Utilisant le clustering, on a  $F_p(\underline{x}) \simeq \prod_{I \in \mathcal{I}} F_{|I|}(\underline{x}_I)$  uniformément sur  $\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) \, d\underline{x} &\simeq \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \prod_{I \in \mathcal{I}} \left( F_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \in I} \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) \, d\underline{x} \\ &\simeq \prod_{I \in \mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_{\{I\}, \eta(R)}^{|I|} } \left( \prod_{i \in I} \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_{|I|}(\underline{x}_I) \, d\underline{x}_I. \end{aligned}$$

Si  $I = \{i, j\}$ , le facteur correspondant est :

$$\int_{|x_i - x_j| \leq \eta(R)} \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \phi_j \left( \frac{x_j}{R} \right) F_2(x_i, x_j) \, dx_i \, dx_j \simeq m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j) = O(R).$$

## Partitions sans singletons

Utilisant le clustering, on a  $F_p(\underline{x}) \simeq \prod_{I \in \mathcal{I}} F_{|I|}(\underline{x}_I)$  uniformément sur  $\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) \, d\underline{x} &\simeq \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \prod_{I \in \mathcal{I}} \left( F_{|I|}(\underline{x}_I) \prod_{i \in I} \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) \, d\underline{x} \\ &\simeq \prod_{I \in \mathcal{I}} \int_{\mathbb{R}_{\{I\}, \eta(R)}^{|I|} } \left( \prod_{i \in I} \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_{|I|}(\underline{x}_I) \, d\underline{x}_I. \end{aligned}$$

Si  $I = \{i, j\}$ , le facteur correspondant est :

$$\int_{|x_i - x_j| \leq \eta(R)} \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \phi_j \left( \frac{x_j}{R} \right) F_2(x_i, x_j) \, dx_i \, dx_j \simeq m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j) = O(R).$$

Si  $\mathcal{I} \in \mathcal{PP}_p$ , elle contribue  $\prod_{\{i, j\} \in \mathcal{I}} m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j)$ .



## Partitions avec de gros clusters

Si  $I = \{1, \dots, k\}$  avec  $k \geq 3$ , le facteur correspondant est dominé par :

$$\|F_{|I}\|_{\infty} \left( \prod_{i=2}^k \|\phi_i\|_{\infty} \right) \int_{\mathbb{R}_{\{I\}, \eta(R)}^k} \left| \phi_1 \left( \frac{x_1}{R} \right) \right| dx_1 \dots dx_k = O\left(R \eta(R)^{k-1}\right).$$

## Partitions avec de gros clusters

Si  $I = \{1, \dots, k\}$  avec  $k \geq 3$ , le facteur correspondant est dominé par :

$$\|F_{|I}\|_{\infty} \left( \prod_{i=2}^k \|\phi_i\|_{\infty} \right) \int_{\mathbb{R}_{\{I\}, \eta(R)}^k} \left| \phi_1 \left( \frac{x_1}{R} \right) \right| dx_1 \dots dx_k = O\left(R\eta(R)^{k-1}\right).$$

Si  $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$  contient exactement  $a$  paires et  $b$  parties de cardinal 3 ou plus, sa contribution est dominée par :

$$R^{a+b}\eta(R)^{p-2a-b} = R^{\frac{1}{4}(p+2a+3b)} \left( R^{-\frac{1}{4}}\eta(R) \right)^{p-2a-b} = O\left(R^{\frac{p}{2}}\right) o(1)^{p-2a-b}.$$

Lorsque  $b \geq 1$ , on a  $2a + b < p$  et on obtient  $o\left(R^{\frac{p}{2}}\right)$ .

$$m_p(\nu_R)(\phi_1, \dots, \phi_p) = \sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p} \int_{\mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta(R)}^p} \left( \prod_{i=1}^p \phi_i \left( \frac{x_i}{R} \right) \right) F_p(\underline{x}) d\underline{x}.$$

- Si  $\mathcal{I}$  contient un singleton, elle contribue  $o(R^{\frac{p}{2}})$ .
- Idem si  $\mathcal{I}$  ne contient pas de singleton mais un cluster de cardinal  $\geq 3$ .
- Si  $\mathcal{I}$  est une partition en paires, elle contribue :

$$\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{I}} m_2(\nu_R)(\phi_i, \phi_j).$$

# Singularités des fonctions à $p$ points et clustering

## Rappel

$$\rho_p(x_1, \dots, x_p) = \frac{\mathbb{E} \left[ |f'(x_1)| \dots |f'(x_p)| \mid f(x_1) = \dots = f(x_p) = 0 \right]}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \det \left( \text{Var}(f(x_1), \dots, f(x_p)) \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

On veut montrer que, pour tout  $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$  et tout  $\underline{x} \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta}^p$  :

$$\rho_p(\underline{x}) = \left( \prod_{I \in \mathcal{I}} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \right) \left( 1 + O\left(\sqrt{\|\kappa\|_{2p, \eta}}\right) \right).$$

## Rappel

$$\rho_p(x_1, \dots, x_p) = \frac{\mathbb{E} \left[ |f'(x_1)| \dots |f'(x_p)| \mid f(x_1) = \dots = f(x_p) = 0 \right]}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} \det \left( \text{Var}(f(x_1), \dots, f(x_p)) \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

On veut montrer que, pour tout  $\mathcal{I} \in \mathcal{P}_p$  et tout  $\underline{x} \in \mathbb{R}_{\mathcal{I}, \eta}^p$  :

$$\rho_p(\underline{x}) = \left( \prod_{I \in \mathcal{I}} \rho_{|I|}(\underline{x}_I) \right) \left( 1 + O\left(\sqrt{\|\kappa\|_{2p, \eta}}\right) \right).$$

Concentrons-nous sur  $D_p : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \det \left( \text{Var}(f(x_1), \dots, f(x_p)) \right)$ .

## Le problème avec la diagonale

Si  $|x_i - x_j| > \eta$ , alors  $|\mathbb{E}[f(x_i)f(x_j)]| = |\kappa(x_i - x_j)| \leq \|\kappa\|_{0,\eta}$ .

Pour  $\underline{x} \in \mathbb{R}_{\mathcal{I},\eta}^p$ , on a :

$$\text{Var}(f(x_i))_{1 \leq i \leq p} = \begin{pmatrix} \text{Var}(f(x_i))_{i \in I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \text{Var}(f(x_i))_{i \in I_m} \end{pmatrix} + O(\|\kappa\|_{0,\eta}).$$

Donc  $D_p(\underline{x}) = (\prod_{I \in \mathcal{I}} D_{|I|}(\underline{x}_I)) + O(\|\kappa\|_{0,\eta})$ .

## Le problème avec la diagonale

Si  $|x_i - x_j| > \eta$ , alors  $|\mathbb{E}[f(x_i)f(x_j)]| = |\kappa(x_i - x_j)| \leq \|\kappa\|_{0,\eta}$ .

Pour  $\underline{x} \in \mathbb{R}_{\mathcal{I},\eta}^p$ , on a :

$$\text{Var}(f(x_i))_{1 \leq i \leq p} = \begin{pmatrix} \text{Var}(f(x_i))_{i \in I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \text{Var}(f(x_i))_{i \in I_m} \end{pmatrix} + O(\|\kappa\|_{0,\eta}).$$

Donc  $D_p(\underline{x}) = (\prod_{I \in \mathcal{I}} D_{|I|}(\underline{x}_I)) + O(\|\kappa\|_{0,\eta})$ .

Le “terme dominant” s’annule si  $x_i = x_j$  avec  $i \neq j$  dans le même cluster !

### Principale difficulté

Comprendre l’annulation de  $D_p(\underline{x})$  lorsque des points coalescent.



## Cas $p = 2$

Pour  $x \neq y$ , on a :

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & y - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \end{pmatrix}.$$

Donc, quand  $y \rightarrow x$ ,

$$\begin{aligned} D_2(x, y) &= (y - x)^2 \det \left( \text{Var} \left( f(x), \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right) \right) \\ &\sim (y - x)^2 \det (\text{Var}(f(x), f'(x))) \\ &\sim (y - x)^2. \end{aligned}$$

## Interpolateur de Hermite

Soit  $\underline{x} = (\underbrace{y_1, \dots, y_1}_{n_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{y_m, \dots, y_m}_{n_m \text{ termes}}) \in \mathbb{R}^p$ , avec  $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$  distincts.

Pour tout  $f \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathbb{R})$ , il existe un unique  $\Pi_{\underline{x}, f} \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$  tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{0, \dots, n_i - 1\}, \quad \Pi_{\underline{x}, f}^{(j)}(y_i) = f^{(j)}(y_i).$$

## Interpolateur de Hermite

Soit  $\underline{x} = (\underbrace{y_1, \dots, y_1}_{n_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{y_m, \dots, y_m}_{n_m \text{ termes}}) \in \mathbb{R}^p$ , avec  $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$  distincts.

Pour tout  $f \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathbb{R})$ , il existe un unique  $\Pi_{\underline{x}, f} \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$  tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{0, \dots, n_i - 1\}, \quad \Pi_{\underline{x}, f}^{(j)}(y_i) = f^{(j)}(y_i).$$

Soit  $f \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathbb{R})$ , on définit des fonctions  $[f]_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  continues par :

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^p, \quad \Pi_{\underline{x}, f}(X) = \sum_{k=1}^p [f]_k(x_1, \dots, x_k) \prod_{j=1}^{k-1} (X - x_j).$$

## Différences divisées : exemples

- Pour tout  $k$ ,  $[f]_k(y, \dots, y) = \frac{f^{(k-1)}(y)}{(k-1)!}$ .

- Si  $x_1, \dots, x_k$  sont distincts on a  $[f]_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)}$ .

- En général, si  $x_k \neq x_{k+1}$ ,

$$[f]_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) = \frac{[f]_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}) - [f]_k(x_1, \dots, x_k)}{x_{k+1} - x_k}.$$

## Ordre d'annulation de $D_p$

Soient  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$  distincts. On a :

$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & x_2 - x_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \prod_{j=1}^{p-1} (x_p - x_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [f]_1(x_1) \\ [f]_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ [f]_p(x_1, \dots, x_p) \end{pmatrix}.$$

Quand  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_p) \rightarrow (y, \dots, y)$ ,

$$\begin{aligned} D_p(\underline{x}) &= \det \left( \text{Var} \left( [f]_1(x_1), \dots, [f]_p(x_1, \dots, x_p) \right) \right) \prod_{i < j} (x_j - x_i)^2 \\ &\sim \det \left( \text{Var} \left( f(y), f'(y), \dots, \frac{f^{(k-1)}(y)}{(k-1)!} \right) \right) \prod_{i < j} (x_j - x_i)^2. \end{aligned}$$

The end

Merci de votre attention.